

文章编号: 1000-7598-(2004) 07-1111-06

水平荷载下桩的可靠性分析

洪 平¹, 洪汉平²

(1. 南昌航空工业学院 土建系, 江西 南昌 330034 ; 2. 加拿大西安大略大学 土木与环境工程系)

摘 要: 由于桩及桩周土的材料性能参数的不确定性, 桩的响应也是不确定的。在考虑桩的水平荷载、桩周土反力及桩的刚度等不确定因素情况下, 采用一阶可靠度分析方法对水平受荷桩的最大弯矩及桩顶的最大位移进行了可靠性分析, 进而, 考虑分布参数的不确定性, 用点估计法预估桩的失效概率, 对给定的 $p-y$ 曲线进行桩的可靠性分析。研究表明, 在失效概率相对较低的情况下, 水平荷载下基桩的失效概率与随机变量的分布类型假定有较大关系, 随机变量分布参量的不确定性只会对桩的失效概率产生较小的影响。

关 键 词: $p-y$ 曲线; 可靠性; 概率; 位移; 最大弯矩

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

Reliability analysis of laterally loaded piles

HONG Ping¹, HONG Han-ping²

(1. Department of Civil Engineering, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, China;

2. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Western Ontario, Ontario, N6A 5B9)

Abstract: Since the material properties of the pile and the soil surrounding the pile are uncertain, so the responses of pile are uncertain too. Reliability analysis of the responses such as the maximum bending moment in the pile and the pile head displacement were presented. The analyses of responses of pile were obtained by discretizing the pile as beam elements and by using the $p-y$ curve to represent the soil resistance. Reliability analyses of laterally loaded pile were carried out using the first order reliability analysis method by considering the uncertainty in horizontal loading, the soil resistance and the stiffness of pile. Further, the effect of the uncertainty in the probability distribution parameters on the estimated failure probability was investigated using the point estimate method. The numerical results for the considered examples seem to suggest that the influence of the uncertainty in the probability distribution parameters on the estimated reliability is not very significant.

Key words: $p-y$ curve; reliability; probability; displacement; maximum bending moment

1 前 言

桩身受荷与水平变位之间的关系为非线性的, 我们一般用 $p-y$ 曲线来表示这种非线性关系。很多学者^[1]基于有限差分法和有限元方法, 建立了考虑这种非线性关系预估水平荷载下基桩响应的方法。

由于水平荷载、桩的刚度及桩周土的反应皆为不确定因素, 因此, 水平荷载下桩的响应也是不确定的。Vanmarcke^[2]和以后的一些学者提出了土体概率特征和随机过程模拟的模型。其中有的模型用包含均值项和波动项来模拟土体特性的随机过程。一般来说, 在考虑随机过程的情况下可靠性分析是非常复杂的, 因为, 它需要考虑到超越概率的问题。

为了简化水平荷载下桩的可靠性分析, 通常可用随机变量代替随机过程来表示不确定因素^[3, 4]。文献[3, 4]表明, 考虑这些不确定因素对研究水平荷载下桩的响应非常重要。文[3]的分析是基于随机变量的两次矩来进行的; 文[4]考虑随机变量为正态分布, 同时应用响应面方法进行可靠度分析。尽管响应面方法在可靠度分析中有许多优点, 但它的准确性有赖于其插值点是否合适^[5], 值得研究。

本文着重于研究水平荷载下桩的失效概率预估。虽然桩周土的特性应认为是随机过程, 但为了方便起见, 我们仍假定它可用随机变量来表示。当所考虑随机变量的值为已知时, 桩的最大弯矩及桩顶的最大位移的计算将采用有限元法。桩体将用梁

单元反映, 桩土间的相互作用将由非线性弹簧表示。由于很多研究表明, 一阶可靠度分析方法适用范围非常广泛且能提供足够的精确度, 因此, 本文将用这种方法来对桩的最大弯矩及桩顶的最大位移进行可靠性分析。再之, 桩周土的材料性能的概率分布参量一般是不确定的, 本文也对这一不确定性对桩的可靠性影响作了分析。下面将给出预估水平受力桩失效概率的详细分析过程和公式。在数值分析中采用桩顶容许位移和桩的最大弯矩作为桩的两个破坏准则。

2 水平荷载下桩的可靠性分析

2.1 可靠性分析

桩在水平受力下的水平位移可由下式表达:

$$s \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + p(y, z; \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

式中 $s = EI$ 即桩的抗弯刚度, E 为桩的横向弹性模量, I 是桩截面的惯性矩, y 是桩的水平位移, $p(y, z; \mathbf{u})$ 表示桩周土的荷载-位移的非线性关系, 其中 $\mathbf{u}$ 为一不确定矢量 $\mathbf{U}$ 的值。 $\mathbf{U}$ 包括多种因素, 例如: 土体的初始刚度、土的最大反力等。

如果给定 $\mathbf{U}$ 的值 $\mathbf{u}$ 、桩的抗弯刚度 s 和作用在桩上的水平荷载 p_0 , 求解式(1)可用有限元方法, 化为求解下面的非线性方程得到问题的解

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}; s, \mathbf{u}) - \mathbf{F}_0(p_0) = 0 \quad (2)$$

式中 $\mathbf{R}$ 矢量代表土体反力, $\mathbf{F}_0$ 表示外荷载, 它是 p_0 的函数, $\mathbf{d}$ 是桩身点的位移。

由于桩的抗弯刚度、水平荷载 p_0 和 $\mathbf{U}$ 皆为不确定, 桩的响应也为不确定 (例如 $\mathbf{d}$)。这一问题可用概率分析方法来解决。下面我们采用两个简单的破坏准则来考虑桩的可靠性。它们分别为桩顶位移超过某一给定值和桩身最大弯矩超过给定值, 桩顶位移和最大弯矩都是桩身点位移矢量 $\mathbf{d}$ 的函数。

为了简化起见, 让 $\mathbf{X}$ 为包含所有应考虑的概率变量的一个矢量符号, $g_d = g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 和 $g_m = g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 分别表示桩顶位移准则和最大弯矩准则的极限状态函数。其中 $g_d \leq 0$ 时, 表示由位移准则判定的失效区域, 当 $g_m \leq 0$ 时, 表示由最大弯矩准则判定的失效区域。

当给定 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数 $f_x(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ 时 (这里矢量 $\mathbf{a}$ 是不确定概率分布参量 $\mathbf{A}$ 的某一个值), 桩的失效概率 $P_{f|\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ 可以表示为:

$$P_{f|\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \int_{g(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_x(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

式中 当 $g = g(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 时, 表示位移准则, 当

$g = g(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 时, 表示最大弯矩准则。公式(3)中的积分可以用 Monte Carlo 方法计算, 也可以用高效率的一阶可靠性方法来计算。一阶可靠性方法是一种迭代法, 由它可得出一个可靠性指标 $\beta^{[6]}$ 。而 $P_{f|\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ 是由 $P_{f|\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \Phi(-\beta)$ 给出的。在公式中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布随机变量的分布函数。

如果我们考虑基桩的失效是由于桩顶位移或桩最大弯矩超过给定值时 (至少违反了两个准则中的一个), 那么桩的失效概率 $P_{fdm|\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ 可由下式求出

$$P_{fdm|\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = P(g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0 + P(g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) - P(g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0 | g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) P(g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) \quad (4)$$

$P(g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0)$ 和 $P(g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0)$ 已由公式(3)给出。条件概率 $P(g_d(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0 | P(g_m(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0)$ 可以用下面的近似方法求得^[7]。结果为:

$$P_{fdm|\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \Phi(-\beta_d) + \Phi(-\beta_m) - \Phi(-\beta_{dm}) \Phi(-\beta_m) \quad (5)$$

其中

$$\beta_{d|m} = (\beta_d - \rho C_1) / \sqrt{1 - \rho^2 C_2} \quad (6)$$

$C_1 = \phi(-\beta_m) / \Phi(-\beta_m)$; $C_2 = C_1(C_1 - \beta_m)$; $\phi(\cdot)$ 是标准正态分布变量的概率密度函数 $\rho = \mathbf{r}_d^T \mathbf{r}_m$ 代表在标准正态分布空间中两个极限状态函数之间的相关系数。 β_d 和 $\mathbf{r}_d$ 表示用一阶可靠性分析方法对 g_d (位移准则) 得到可靠性指标和敏感性系数矢量。 β_m 和 $\mathbf{r}_m$ 则表示 g_m (最大弯矩准则) 下得到的可靠性指标和敏感性系数矢量。

上述方法也可用于基桩在多层土壤情况下, 但是随机变量的数目将增加, 本文对此种情况将不作进一步探讨。

2.2 概率分布参量不确定时可靠性分析

随机变量是由其分布类型和分布参量决定的。因为一般随机变量 $\mathbf{U}$ 的分布参量 $\mathbf{A}$ 是由有限个样本空间的数据经过统计分析而得, 这些参量也是不确定值。这种不确定性也可在计算失效概率中通过 Bayesian 模型考虑进去。让 $f_A(\mathbf{a})$ 表示 $\mathbf{A}$ 的联合概率密度函数。 $\mathbf{X}$ 的 Bayesian 分布 $f_{XB}(\mathbf{x})$ 可以表示为:

$$f_{XB}(\mathbf{x}) = \int_{D_A} f_{x|\mathbf{a}}(\mathbf{x}|\mathbf{a}) f_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (7)$$

式中 D_A 表示 $\mathbf{A}$ 的区域, $f_{x|\mathbf{a}}(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ 是在给定 $\mathbf{a}$ 的值下 $\mathbf{X}$ 的概率分布函数。上式可近似地表达为^[8]

$$P_f = \sum_{j=1}^M P_j P_{f|\mathbf{a}}(\mathbf{a}_j) \quad (8)$$

式中 N 是点估计方法中点的个数, $\mathbf{a}_j$ 表示第 j 点上 $\mathbf{A}$ 的值, P_j 为 j 点上的概率。 $\mathbf{a}_j$ 和 P_j 都基于 $\mathbf{A}$ 的统

计值而求出。例如: 如果 A 中只有一个随机变量, m_A, σ_A 和 λ_A 分别表示 A 的平均值、标准差和偏态系数, 则当 N 等于 2, $a_j = m_A + \sigma_A \xi_j$, $\xi_i = \lambda_{X,3}/2 + (-1)^{3-i} \sqrt{1 + (\lambda_{X,3}/2)^2}$, $p_i = (-1)^{3-i} \xi_{3-i} / \zeta$ $i=1, 2$ [9], 其中 $\xi_j = \lambda_A/2 + (-1)^{3-j} \sqrt{1 + (\lambda_A/2)^2}$, $\zeta = \xi_1 - \xi_2 = 2\sqrt{1 + (\lambda_{X,3}/2)^2}$ 。把这些项代入式(8)中, 则可得到在分布参数 A 不确定时的失效概率。

注意, 只有在比较特殊的情况下我们才知道概率分布参数的概率分布。而在一般情况下, 我们只可求得这些参数的平均值和标准差的统计数据。因为, 平均值和标准差是从有限个样本中得到的, 我们计算出的这些平均值和标准差的统计数据也存在一定的不确定性。基于这种考虑, 在下面的数值分析中, 我们考虑用分布参量 A 代表平均值和标准差。

3 算例及分析

3.1 不考虑分布参量的不确定性的分析结果

水平荷载作用下桩基的计算有多种 p - y 曲线模型, 我国有 m 法、 C 法、 K 法等单一参数法, 目前, 仍有许多学者在做进一步探讨[10]。本文提出的可靠性分析方法适合于各种 p - y 曲线, 在本文的数值分析中我们采用文献[4]给出下式:

$$p(y, z) = y / \left(\frac{1}{k_h(z)d} + \frac{|y|}{p_{ult}(z)d} \right) \quad (9)$$

式中 $p(y, z)$ (kN/m) 是桩周土在深为 z 处的荷载-位移关系; y (m) 是水平位移; d (m) 是桩的直径; 土的侧向弹性模量为:

$$k_h(z) = k_0 + \alpha_{kh} z \quad (10)$$

土的最大反力为

$$p_{ult}(z) = p_{ult0} + \alpha_{ult} z \quad (11)$$

在式(10)和(11)中, k_0 (kN/m³) 和 p_{ult0} (kPa) 是地基表面处的侧向弹性模量和最大反力; α_{kh} 和 α_{ult} 分别是地基侧向弹性模量和反力沿深度的变化率。

在进行数值分析时, 以混凝土桩为例, 桩径取 0.3 m, 桩长为 15 m, 在桩顶处受到 p_0 的水平荷载。所用数据如表 1 所示。用有限元方法, 桩采用 100 个梁单元, 随机变量采用平均值, 得到桩顶位移是 0.046 m, 桩的最大弯矩为 90.5 kN/m。这些值可以作为桩顶位移和桩的最大弯矩的一阶近似平均值。

考虑到桩顶位移 $d(x)$ 大于给定的位移值 d_s 桩将破坏, 这样, 极限状态函数 g_d 可以表示为:

$$g_d = d_s - d(x) \quad (12)$$

注意到在文献[4]的概率分析中, 随机变量是假设为正态分布的。如将表1中所有的随机变量都作为正态分布, 给定不同 d_s 值, 按本文给出的计算过程和式(12)所得桩的失效概率见图1。

为了进一步研究不同的概率分布类型对可靠性的影响, 注意到表 1 中的所有随机变量都为非负数, 因此, 有理由将随机变量作为对数正态分布, 再次用以上方法进行计算, 得到的结果也在图 1 中表示。比较图 1 中的结果可以看出: 在给定的桩顶极限位移接近于在不考虑任何不确定性用有限元计算的桩顶位移均值时 (即 0.046 m), 分布类型的不同对桩的可靠性影响并不明显, 然而, 如果极限位移 d_s 远大于 0.046 m, 则失效概率的大小受概率分布类型的假定影响很大。进一步研究分布类型的影响显示, 水平荷载为 Gumbel (耿倍尔) 分布, 同时保持其它随机变量为正态分布或正态对数分布时, 计算所得的失效概率同样在图 1 中表现出来。结果显示, 当其它随机变量为正态分布时, 水平荷载的分布假定将明显影响预估失效概率的结果。

表 1 桩的统计数据
Table 1 Statistics for the piles

变量名	均值	变异系数
$S / \text{kN} \cdot \text{m}^2$	20 000	0.10
$k_0 / \text{kN} \cdot \text{m}^3$	7 000	0.20
$\alpha_{kh} / \text{kN} \cdot \text{m}^4$	200	0.20
$p_{ult0} / \text{kN} \cdot \text{m}^2$	700	0.25
$\alpha_{ult} / \text{kN} \cdot \text{m}^3$	30	0.25
P_0 / kN	100	0.3

基于基桩最大弯矩的破坏准则: 基桩的最大弯矩 $m(x)$ 是否超过给定的最大弯矩 m_s , 即 $g_m = m_s - m(x)$ 进行类似的分析, 得到的结果见图 2。从图中可以看出, 图 1 所得的结论对图 2 也同样实用。

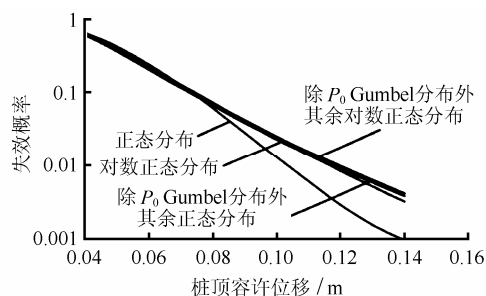


图 1 基于桩顶位移准则的失效概率
Fig.1 Probability of failure based on the pile head displacements

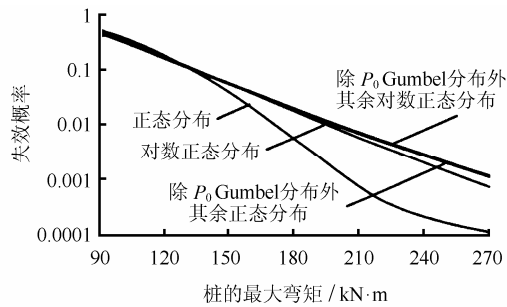


图 2 基于最大弯矩准则的失效概率
Fig.2 Probability of failure based on the maximum bending moment

同时考虑桩顶位移及桩的最大弯矩两个准则,对一系列的 d_s 和 m_s 得到的失效概率见图3, 4所示,通过图3a 和图3b 我们可以看出: 在低失效概率水平下,对随机变量作出正态分布假定或对数正态分布假定将明显影响失效概率的预估结果。计算中可以看出,两个极限状态间的相关系数 ρ ($\rho = r_d^T r_m$) 是非常高的。而且,当 $P(g_m(d, x) \leq 0)$ 明显大于 $P(g_d(d, x) \leq 0)$ 时, $P_{fdmja}(a)$ 的值接近 $P(g_m(d, x) \leq 0)$ 的值; 当 $P(g_m(d, x) \leq 0)$ 的值较 $P(g_d(d, x) \leq 0)$ 小许多时, $P_{fdmja}(a)$ 的值与 $P(g_d(d, x) \leq 0)$ 接近。

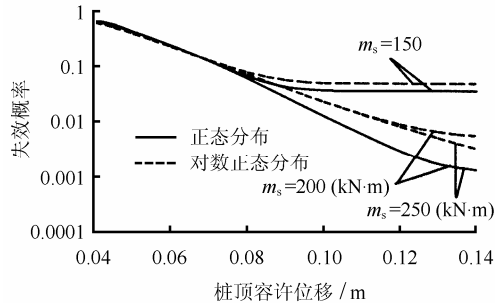


图 3 随机变量为正态或对数正态分布
Fig.3 All random variables are normal or lognormally distributed

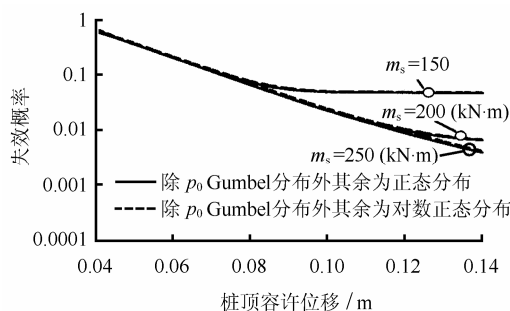


图 4 p_0 为 Gumbel 分布其余为正态或对数正态分布
Fig.4 All random variables are normal or lognormally distributed except that p_0 is Gumbel distributed

因为,在桩-土系统中水平荷载、刚度和抵抗力

等随机变量皆有非负定义,对水平荷载进行对数正态分布假定或 Gumbel 假定都得到相似的失效概率。因此,在下面的分析中,将所有的随机变量都假定为对数正态分布。为了研究表 1 中 6 个随机变量及各随机变量变异系数对失效概率影响的相对重要性,我们考虑让 $d_s = 0.12$ m 且 $m_s = 210$ kN/m,将表 1 中一个随机变量的变异系数一直变化到 0.5,同时保持其它随机变量的变异系数不变的情况下,所得结果用图 5, 6 表示。结果显示:在桩顶位移破坏准则下,对失效概率的影响能力从大到小依次为 p_0 , k_0 , p_{ult0} , s , α_{kh} 和 α_{ult} 的变异系数;在桩的最大弯矩破坏准则下依次为 p_0 , p_{ult0} , k_0 , s , α_{kh} 和 α_{ult} 的变异系数。综合考虑以上两种情况 α_{kh} 和 α_{ult} 的变异系数对失效概率的预估结果非常小。

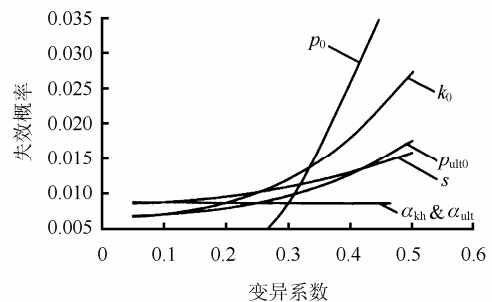


图 5 变异系数对失效概率的影响 (基于桩顶位移)
Fig.5 Effect of the coefficient of variation on the probability of failure based on the pile head displacement

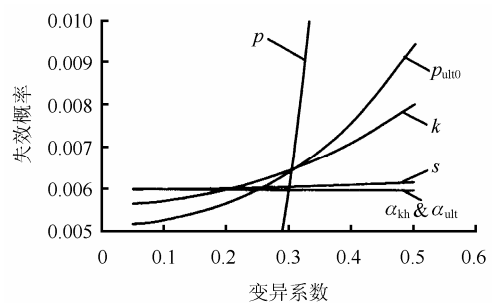


图 6 变异系数对失效概率的影响 (基于最大弯矩)
Fig.6 Effect of the coefficient of variation on the probability of failure based on maximum bending moment

为确定 k_0 和 p_{ult0} 的相关系数 ρ_{kp} 及 α_{kh} 和 α_{ult} 的相关系数 ρ_a 对桩的可靠性的影响,在保证表 1 中其它随机变量和变异系数不变的情况下,改变 ρ_{kp} 和 ρ_a 的值进行敏感性分析。所得结果见图 7, 8。结果显示: ρ_{kp} 对桩的失效概率的预估值影响很小,而 ρ_a 对桩的失效概率的预估值不产生影响。这是因为所研究的桩的承载能力基本上是由桩顶附近地基的侧向弹性模量和最大反力决定的。

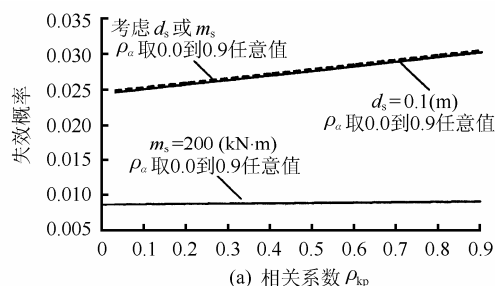


图7 相关性对失效概率的影响 $d_s = 0.1(\text{m})$ $m_s = 200(\text{kN} \cdot \text{m})$
Fig.7 Effect of the correlation on the probability of failure
 $d_s = 0.1(\text{m})$ and $m_s = 200(\text{kN} \cdot \text{m})$

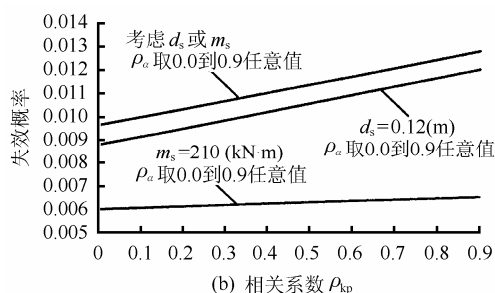


图8 相关性对失效概率的影响 $d_s = 0.12(\text{m})$ $m_s = 210(\text{kN} \cdot \text{m})$
Fig.8 Effect of the correlation on the probability of failure
 $d_s = 0.12(\text{m})$ and $m_s = 210(\text{kN} \cdot \text{m})$

3.2 考虑概率分布参量的不确定性的分析结果

为了研究概率分布参量的不确定性对失效概率预估的影响,我们对上面所讨论的桩进一步进行可靠性分析。将表1中所列的各个统计数据作为独立的对数正态分布随机变量。

让 X 代表 k_0 , α_{kh} , p_{ult0} 和 α_{ult} 中的任意一个变量,其均值及标准差分别用符号 m_X 和 σ_X 表示。考虑 m_X 或 σ_X 为不确定值,其均值为 m_X 或 σ_X ,其变异系数分别为 v_{mx} 或 $v_{\sigma x}$ 。 m_X 和 σ_X 的偏态系数为零。

用一阶可靠性方法结合点估计法(参看式(8))对不同的 v_{mx} 可得到不同的失效概率,结果见图9,10。图6a的结果显示:考虑位移准则时 k_0 和 p_{ult0} 的均值的不确定性对预估失效概率有一定影响。如果考虑 α_{kh} 和 α_{ult} 的均值的变异系数小于或等于0.3,所得的结果与不考虑随机变量均值的不确定性得到的失效概率曲线在图中无法区分。换句话说,即 α_{kh} 和 α_{ult} 的均值的不确定性对失效概率的影响可忽略不计。

图6b显示了考虑最大弯矩准则所得的结果。结果同样表明:考虑 k_0 和 p_{ult0} 的均值的不确定性对预估失效概率有一定影响。而 α_{kh} 和 α_{ult} 的均值的不确定性对失效概率的影响可忽略不计。

类似可进行考虑 k_0 , α_{kh} , p_{ult0} 和 α_{ult} 的标准差的不确定性对失效概率的影响,考虑标准差的变异系数小于或等于0.3,所得结果与没有考虑分布参数的不确定性基本一致,因此,没有在绘于图中。

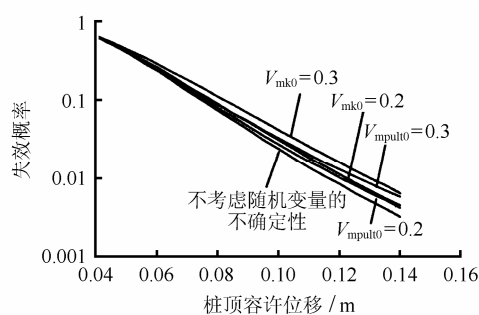


图9 随机变量均值的不确定性对失效概率的影响
(基于桩顶位移准则)

Fig.9 Effect of the uncertainty in the mean on the probability of failure (Based on the pile head displacement)

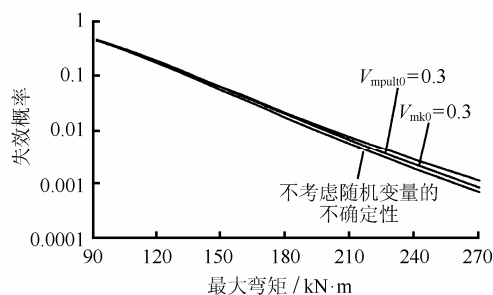


图10 随机变量均值的不确定性对失效概率的影响
(基于最大弯矩准则)

Fig.10 Effect of the uncertainty in the mean on the probability of failure (Based on maximum bending moment)

4 结论

考虑基桩本身、土体材料及所受荷载的不确定性,本文对基桩的可靠性分析给出了计算步骤。同时,还提出了在考虑概率分布参量的不确定性时进行基桩可靠性计算的简单方法。应用给出的计算方法得到的结果表明:在失效概率相对较低的情况下,水平荷载下基桩的失效概率与随机变量的分布类型假定有较大关系。影响失效概率的最重要因素是水平荷载的不确定性、桩周土的侧向弹性模量和最大反力。其它不确定性变量对桩的失效概率影响很小。算例结果还显示,随机变量分布参量的不确定性只会对桩的失效概率产生较小的影响。

参考文献

- [1] Smith I M, Griffiths D V. Programming the finite element method[M]. John Wiley and Sons, Chichester, England, 1998.
- [2] Vanmarcke E. Probabilistic modeling of soil profiles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 1977, 103(GT11): 1227-1246.
- [3] Ruiz S. Non-dimensional probabilistic coefficients for laterally loaded piles[J]. *Structural Safety*, 1986, 4: 41-47.

-
- [4] Tandjira V, The C I, Low B K. Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods[J]. **Structural Safety**, 2000, 22: 335—355.
- [5] Hong H P. Simple approximation for improving second-order reliability estimates[J]. **Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineering**. 1999, 125(5): 592—595.
- [6] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequence[J]. **Computer and Structures**, 1976, 9: 489—494.
- [7] Mendell N R, Elston R C. Multifactorial qualitative traits: genetic analysis and prediction of recurrence risks[J]. **Biometrics**, 1974, 30: 41—57.
- [8] Hong H P. Evaluation of the Probability of Failure with Uncertain Distribution Parameters[J]. **Civil Engineering Systems**, 1996, 13: 157—168.
- [9] Rosenblueth E. Point estimation for probability moments[J]. **Proceedings of the National Academy of Science**, 1975, 72: 3 812—3 814.
- [10] 王梅, 楼志刚, 李建乡等. 水平荷载作用下单桩非线性 m 法试验研究[J]. 岩土力学, 2002, 23(1): 23—26.